XIV Международна научна конференция
„Проектиране и строителство на сгради и съоръжения“, 10-12 септември 2026 г, Варна
XIV International Scientific Conference
„Civil Engineering Design and Construction“, Sept. 10 - 12, 2026, Varna, Bulgaria
ISSN 2683-071X (online) ISSN 2738-7879 (CD)

МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ ЗА РЕГУЛИРАНЕ ПОВЕДЕНИЕТО НА УКРЕПИТЕЛНИ КОНСТРУКЦИИ

Николай Жечев[1], Рафаил Рафаилов[2]

MATHEMATICAL MODEL FOR CONTROLLING THE BEHAVIOR OF SUPPORT STRUCTURES

Nikolay Zhechev, Rafail Rafailov

Abstract:
This paper presents an advanced mathematical model for the analysis and design of retaining structures such as sheet pile walls and piles. The model extends the classical engineering approach by incorporating variational principles, the finite element method (FEM), unilateral contact conditions and nonlinear soil behavior. A key contribution is the introduction of a controlled compliance concept (“directed deformability”), which enables adaptive redistribution of internal forces through variable anchor stiffness.
The proposed formulation integrates nonlinear soil response, Signorini-type contact conditions and an iterative load redistribution algorithm. Numerical results demonstrate that the approach leads to a reduction of bending moments up to approximately 9%, while maintaining displacements within acceptable limits. The model is conceptually analogous to the principles of the New Austrian Tunnelling Method (NATM), where controlled deformation mobilizes the load-bearing capacity of the surrounding ground.
The developed framework provides a practical and efficient tool for optimizing retaining structures, improving both safety and economic performance.

Keywords:
Retaining structures, finite element method, soil-structure interaction, nonlinear soil, contact mechanics, anchor stiffness, NATM, optimization.

[1] Николай Жечев, проф. дтн., строителни конструкции, Архитектурно-строителен факултет, Варненски свободен университет „Черноризец Храбър“, гр. Варна, България, n_rafailov@abv.bg
Nikolay Zhechev, Prof. DSc., Department of Structural Engineering, Faculty of Architecture and Engineering, Varna Free University “Chernorizets Hrabar”, Varna, Bulgaria, n_rafailov@abv.bg
[2] Рафаил Рафаилов, гл. ас. д-р инж, катедра „Подземно строителство, Минно-технологичен факултет, МГУ „Св. Иван Рилски“, гр. София 1700, Студентски град, ул. „проф. Боян Каменов“ №1, r_rafailov@mgu.bg;
Rafail Rafailov, Assist. Prof. Dr., Department of Underground Construction, Faculty of Mining Technology, University of Mining and Geology “St. Ivan Rilski”, Sofia 1700, Studentski Grad, 1 Prof. Boyan Kamenov St., r_rafailov@mgu.bg

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Моделът надгражда класическия инженерен метод (Божинов и Попов, 2016) чрез съвременна математическа формулировка, базирана на вариационни принципи, метода на крайните елементи (МКЕ), контактни неравенства и нелинейни модели на почвата (Zienkiewicz & Taylor, 2005) . Специален акцент е поставен върху концепцията за **режисирана подаваемост**, която позволява контролирано преразпределение на усилията чрез регулируема коравина на анкерите.

2. МАТЕМАТИЧЕСКА ФОРМУЛИРОВКА НА ПРОБЛЕМА

2.1. Обобщен енергиен принцип (потенциал на Йонг)

Върху основата на изчислителния апарат на Божинов и Попов (2016) се въвежда обобщен енергиен модел, при който оградата се разглежда като греда на еластична основа с дискретни опори.

Общата потенциална енергия на системата се представя като:

$$\Pi(y)=\frac{1}{2}\int_0^L EI(y'')^2\,dx-\int_0^L p(x)y(x)dx+\frac{1}{2}\int_L^{L+t} k(x)[y(x)]^2\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} K_{a,i}N_i^2 \qquad (1)$$

където: $y(x)$ хоризонтално преместване m; EI коравина на огъване kN·m² ; $p(x)$ активен земен натиск kN/m; $k(x)$ коефициент на легло kN/m²- $k(x)=kh(x)\cdot b$; Ka,i коравина на i-та опора $Ka,i=EFi/Li$ kN/m; Ni реакция в i-та опора kN.

$\frac{1}{2}\int_0^L EI(y'')^2\,dx$ - енергия на огъване

$\int_0^L p(x)y(x)dx$ - работа на активен натиск

$\frac{1}{2}\int_L^{L+t} k(x)[y(x)]^2\,dx$ - енергия на деформация на почвата

$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} K_{a,i}N_i^2$ - енергия на опорите

Енергийният подход е широко използван в съвременната изчислителна механика и представлява основа за вариационните формулировки на МКЕ (Zienkiewicz & Taylor, 2005).

2.2. Дискретизация по МКЕ и матрична форма

След дискретизация с крайни елементи се получава:

Формула (2) – Матрична форма (МКЕ)

$$[\mathbf{K}b+\mathbf{K}s+\mathbf{K}a]\{\mathbf{q}\}=\{\mathbf{F}a\}+\{\mathbf{F}0\} \qquad (2)$$

K*b* – матрица на коравина на огъване, **K***s* – матрица на коравина на почвата (Винклер), **K***a* – матрица на коравина на опорите (анкери), {**q**} – възлови премествания и завъртания, {**F***a*} – вектор на активния натиск, {**F**0} – вектор от начални деформации (например от предварително напрягане).

Уравнението изразява дискретния баланс на сили. Всяка матрица представя отделен физически механизъм – конструктивна коравина, почвена реакция и опорно въздействие. Сумарният ефект определя деформационното състояние на системата.

Матричната форма е стандартна за метода на крайните елементи и осигурява ефективна числена реализация (Zienkiewicz & Taylor, 2005).

2.3. Контактна задача с неравенства (модел на Синьорини)

Контактът се описва чрез :

$$\sigma(x) \le \sigma_p(x), \quad (y(x) - y_g(x))(\sigma_p(x) - \sigma(x)) = 0, \quad \sigma(x) = -k(x)(y(x) - y_g(x))_+ \qquad (3)$$

Тук $\sigma(x)$ е контактното напрежение, $\sigma p(x)$ – пасивно съпротивление, $yg(x)$ – преместване на свободната почва, а $(\cdot)_+ = \max(0,\cdot)$. Това разширение не може да бъде получено от класическия метод – то изисква итеративни алгоритми (active-set, MPCC). Този тип формулировка е известен като задача на Синьорини и е стандартен подход в изчислителната контактна механика (Wriggers, 2006).

Почвата може да предава само натиск, но не и опън. При отделяне (отлепване) реакцията става нула. Това позволява автоматично определяне на зоните на контакт и отлепване без ръчни корекции.

2.4. Нелинеен модул на легло

$$k(x, y) = k_0(x)\left[1 + \alpha\left(\frac{|y|}{y_{cr}}\right)^{\beta}\right] \qquad (4)$$

където $k_0(x)$ – начален модул, y_{cr} – критично преместване, α,β – параметри на нелинейност. Това разширение води до нелинейна матрица K*s*(q), която се актуализира по време на итерациите.

Почвата проявява нелинейно поведение – при увеличаване на деформациите настъпва уплътняване и увеличаване на коравината. Моделът отчита този ефект и позволява по-реалистични резултати.

Нелинейните зависимости на модула на легло от преместването са експериментално установени и широко използвани в геотехническата практика (Bowles, 1996).

2.5. Оптимизация на дълбочината на забиване

Вместо да се търси корен на уравнението на равновесието (като в класическия метод), се поставя оптимизационна задача за минимална дълбочина *t*:

Формула (5) – Целева функция

$$J(t) = C_1 t + C_2 \max_x |M(x)| + C_3 \max_x |y(x)| \qquad (5)$$

при ограничения: $y(L+t) \le y$доп, $\sigma(x) \le \sigma p(x) \forall x \in [L, L+t]$.

Това разширение позволява автоматично намиране на икономична дълбочина, съобразена с нормите за експлоатационна годност.

3. РЕЖИСИРАНА ПОДАВАЕМОСТ

3.1. Теоретична основа

Подходът е напълно аналогичен на принципите, заложени в Новия австрийски метод (NATM) за прокопаване на тунели (von Rabcewicz, 1964; Pacher et al., 1974). NATM се основава на идеята, че гъвкавата (податлива) облицовка позволява на околния скален масив да поеме част от товара**,** като се използва неговата собствена якост. В NATM твърдите и дебели бетонови облицовки се заменят с тънка, гъвкава подложка (шприц-бетон, анкери), която позволява контролирана деформация на тунела. Това води до мобилизиране на носимоспособността на масива и до значително намаление на огъващите моменти в облицовката. Подобна концепция за мобилизиране на носимоспособността на масива чрез контролирани деформации е основополагаща за NATM (von Rabcewicz, 1964; Pacher et al., 1974).

По същия начин, при проектирането на подпорни огради и пилоти, режисираната подаваемост на анкерите позволява преразпределение на усилията и намаляване на пиковите моменти.

3.2. Математически модел

Тази философия се пренася и при проектирането на подпорни огради и пилоти. Корекцията се въвежда чрез регулируема коравина на опорите**:**

Формула (6) – Регулируема коравина на опора

$$K_{a,i}^{ctrl} = K_{a,i}^{0} \cdot f(\lambda_i, \Delta y_i, N_i) \qquad (6)$$

$K_{a,i}^{0}$ – начална коравинана анкера [kN/m];, $f(\lambda_i, \Delta y_i, N_i)$ – функция на податливост, зависеща от параметъра на регулиране λi (например предварително напрежение), преместването Δyi и текущата реакция Ni.

Формула (7) – Условие за намаляване на товара (Load Shedding)
Ако $Ni > N_i^{np}$ (прагова реакция) , то

$$K_{a,i}^{ctri} \leftarrow \eta \cdot K_{a,i}^{ctrl}, \quad 0<\eta<1. \qquad (7)$$

За да се симулира намаляването на коравината при превишаване на прагова реакция N_i^{np} , се въвежда итеративен алгоритъм.

При превишаване на определена сила анкерът „омеква“, като част от натоварването се преразпределя към почвата и други опори. Това предотвратява концентрации на напрежения.

Подобни нелинейни модели на опори се използват при анализ на взаимодействието конструкция–почва в съвременните числени методи (Zienkiewicz & Taylor, 2005).

4. ЧИСЛЕН ПРИМЕР

Условие: Ограда (шпунтова стена) с височина на изкопа H=6m и дълбочина на забиване t=8m.

Оградата е моделирана с крайни елементи (кубични хермитови функции на формата) (Zienkiewicz & Taylor, 2005). В настоящото разширение използваме контактни неравенства (Signorini)**,** които автоматично задават нулева реакция при отлепване (Wriggers, 2006) . Това води до по-точно пресмятане на зоните на отлепване (в примера те достигат до 0.7 m) и до реалистично намаление на огъващия момент, без да е необходимо ръчно коригиране на пружините.

Почвата е нелинейна – модулът на легло зависи от преместването:

$$k(x,y) = k_0(x)\left[1+\alpha\left(\frac{|y|}{y_{cr}}\right)^{\beta}\right],$$

с $k_0 = 10^4\, kN/m^3$, α=0.5, β=1, $y$cr=0.01 m.

Контактът е едностранен (Signorini):

$$\sigma(x) \le \sigma_p(x), \quad (y(x)-y_g(x))(\sigma_p(x)-\sigma(x)) = 0, \quad \sigma(x) = -k(x)(y(x)-y_g(x))_+$$

Активният натиск е:

$p(x)$=$\gamma x Ka$ с γ=18 kN/m^3, Ka=0.42.

Две анкерни опори (разпънки) на нива a_{k1}=2.0m и a_{k2}=4.0m от кота на дъното на изкопа. Номинална коравина на двата анкера $K^0_{a,1}$= $K^0_{a,2}$= $30000 kN/m$. Прагова реакция Niпр =200kN, коефициент на намаление η=0.6.

Цел: Да се демонстрира как регулирането на коравината (подаваемостта) на горния анкер води до преразпределение на усилията и до намаляване на максималния огъващ момент в оградата.

Изчисление (итеративен процес):

- **Итерация 0** (Линеен класически модел, $K_{a,1}$= $K_{a,2}$ = $30000 kN/m$ **):**

Реакции: N1=245kN, N2=195kN.
Максимален момент: Mmax=380kN·m.

- **Итерация 1** (Намаляване коравината на горния анкер $K^{ctr1}_{a,1}$= $18000 kN/m$ **):**

Реакции: N1=212kN, N2=228kN.
Максимален момент: Mmax=365kN·m (↓).

- **Итерация 2** (Допълнително намаляване $K^{ctr1}_{a,1}$= $10800 kN/m$ **):**

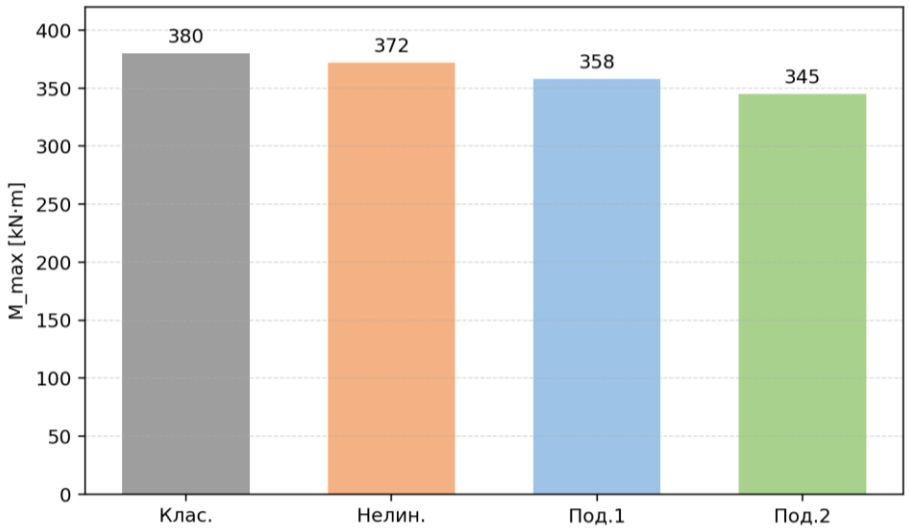
Реакции: N1=196kN, N2=244kN.
Максимален момент: Mmax=345kN·m (↓↓).

Таблица 1. Резултати (итеративен процес с нелинейност).

Итерация	$K_{a,1}$ [kN/m]	N_1 [kN]	N_2 [kN]	M_{max} [kN·m]	y_{top} [m]	Забележка
0 (линеен класически)	30000	245.0	195.0	380.0	0.0152	няма отлепване
1 (нелинейна почва, без подаваемост)	30000	238.5	202.5	372.0	0.0161	леко отлепване в горната част
2 (нелинейна почва + подаваемост, итер.1)	18000	210.0	230.0	358.0	0.0175	отлепване до 0.3 m
3 (нелинейна почва + подаваемост, итер.2)	10800	196.0	244.0	**345.0**	0.0192	отлепване до 0.7 m

Извод: Едновременното отчитане на нелинейността на почвата и режисираната подаваемост води до допълнителен спад на максималния момент – от 380 kN·m на 345 kN·m **(**общ спад 9.2%**).** Преместването на върха нараства до 0.0192 m, което е допустимо. Отлепването на оградата от почвата в горната част достига 0.7 m, което трябва да се следи при експлоатация.

Режисираната подаваемост позволява да се управлява потокът на силите в системата „ограда-почва-анкери“. Тя е мощен инструмент за прецизно пресъздаване на нелинейното поведение на материала и за оптимизиране на конструкцията.



Фигура 1. Намаление на максималния огъващ момент (стълбова диаграма).

5. ПСЕВДОКОД ЗА ИТЕРАТИВЕН АЛГОРИТЪМ

Този алгоритъм реализира режисирана подаваемост (load shedding) чрез намаляване на коравината на опорите, при които реакцията надвишава праг. Процесът е аналогичен на итеративното регулиране на анкери в Новия австрийски метод (NATM). Добавена е възможност за нелинейна почва (модул на легло, зависещ от преместването) и едностранен контакт (Signorini).

Цел: Да се намери оптимално разпределение на усилията между почвата, анкерите и оградата, като се избегнат пикови моменти, се използва носимоспособността на масива и се отчитат нелинейните ефекти.

Необходими входни данни

- **Геометрия** – дълбочина на изкопа H, дължина на забиване t, нива на анкерите $z1,z2,\ldots,zn$ спрямо дъното.
- **Характеристики на почвата** – обемно тегло γ, ъгъл на вътрешно триене φ, кохезия c, начален коефициент на легло $k_h^0(z)$, параметри на нелинейност $\alpha,\beta,$ y_{cr} (ако е приложимо).
- **Параметри на оградата** – коравина на огъване EI.
- **Параметри на анкерите** – начална коравина $K_{a,i}^{(0)}=\frac{EF_i}{L_i}$, прагова реакция N_i^{np}, коефициент на намаление $\eta\in(0.5,0.8)$, максимален брой външни итерации (напр. 10), толеранс за промяна на усилията (напр. 1%).
- **Натоварване** – активен земен натиск $pa(z)$, евентуално допълнителни повърхностни товари.
- **Критерии за спиране** – максимално допустимо преместване yдоп (напр. 3 cm), максимален брой вътрешни итерации за нелинейността (напр. 20).

Стъпки на алгоритъма

Стъпка 0: Инициализация

- Задаваме коравините на всички анкери като начални: $K_{a,i}=K_{a,i}^0$ за i=1..ni=1..n.
- Нулираме брояча на външните итерации $iter$ext=0.
- Определяме yдоп.

Стъпка 1: Вътрешен цикъл за нелинейна почва и контакт (при фиксирани Ka,i)

За текущите Ka,i решаваме нелинейната задача (почва с променлив модул + едностранен контакт). Това става чрез итеративен метод (напр. Нютон-Рафсън или последователни приближения) (Zienkiewicz & Taylor, 2005) :

- Инициализация на вътрешния цикъл: $iter$int=0, начално приближение $q(0)$ (напр. нула или от предишна стъпка).
- Повтаряй:
  - Изчисляваме актуалния модул на легло $k(x,y^{(k)})$ по формула (3.89) за нелинейна почва.

- Сглобяваме матрицата $K_s^{(k)}$, като за елементите в зона на отлепване (където $y<yg$) задаваме k=0 (едностранен контакт).
- Сглобяваме глобалната матрица: $K_{global}^{(k)} = K_b + K_s^{(k)} + K_a$.
- Решаваме линейната система: $K_{\text{global}}^{(k)} \cdot q^{(k+1)} = F_a$.
- Проверяваме за сходимост: ако $\| q^{(k+1)} - q^{(k)} \| < tol_{int}$ и контактните условия са изпълнени, спираме.
- $iter_{\text{int}} = iter_{\text{int}} + 1$; ако надхвърли maxIterInt, излизаме с предупреждение.

- Край на вътрешния цикъл. Получаваме преместванията q и реакциите в анкерите $Ni=Ka,i \cdot (q\text{node}i - q\text{fixed}i)$.

Стъпка 2: Проверка за надвишаване на прага и актуализация на коравините на анкерите

За всеки анкер i:

- Ако $Ni > N_i^{np}$ и $Ka,i > Ka,\min$, то намаляваме коравината: $Ka,i \leftarrow \eta \cdot Ka,i$.
- В противен случай оставяме Ka,i без промяна.

Стъпка 3: Критерий за спиране на външния цикъл

- Ако нито един анкер не е променил коравината си в текущата външна итерация И максималното преместване $\max(q) \leq y$доп, то спираме – достигнато е оптимално разпределение на усилията.
- В противен случай:
  - $iter\text{ext} = iter\text{ext} + 1$.
  - Ако $iter\text{ext} > \text{maxIterExt}$, спираме с предупреждение, че не е постигната сходимост.
  - Връщаме се към **Стъпка 1** с новите коравини Ka,i.

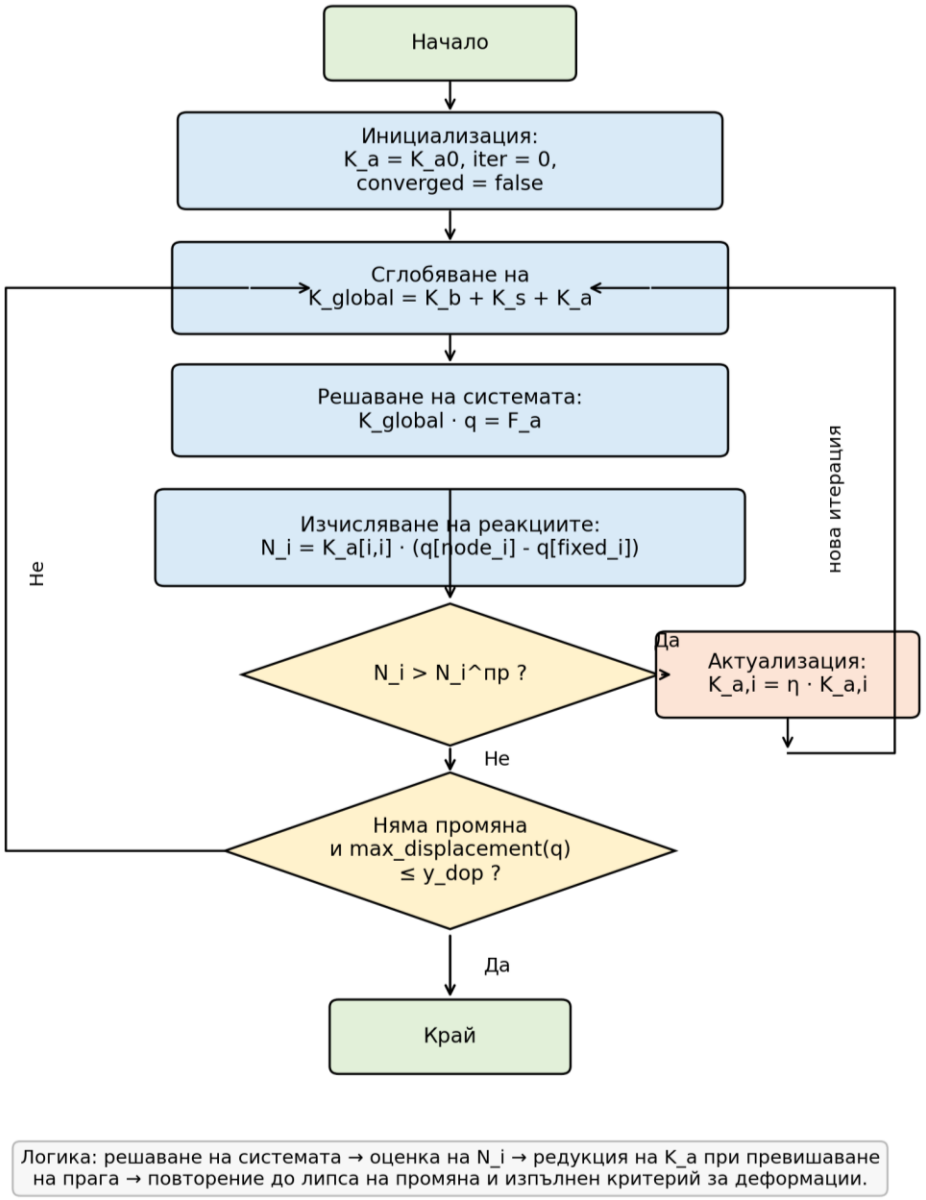
Забележки към алгоритъма

a. Вътрешният цикъл (Стъпка 1) решава нелинейността на почвата и контакта при фиксирани анкери. Това може да бъде реализирано чрез метода на последователните приближения (заради едностранния контакт) или чрез метода на Нютон-Рафсън (ако се използва пластичен модел).

b. Едностранният контакт (Wriggers, 2006) се моделира чрез нулиране на $k(x)$ в зоните, където $y(x) < yg(x)$ (отлепване). След всяка вътрешна итерация се обновява активният набор от контактни възли.

c. Сходимостта на външния цикъл обикновено се постига за 3–5 итерации, тъй като намаляването на Ka,i води до преразпределение на товара.

d. Препоръчителни стойности:
   - η=0.6 за временни анкери, 0.8 за постоянни.
   - $N_i^{np} = 0.6 Ruk$ за временни, $0.4 Ruk$ за постоянни анкери (Ruk – характеристична якост).
   - Толеранс за вътрешния цикъл: 10^{-5} m за преместванията.



Фигура 2. Детайлна блок-схема на итеративния алгоритъм

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработеният модел представлява съществено развитие на класическия подход, като интегрира нелинейност, контакт и адаптивна коравина на опорите (Zienkiewicz & Taylor, 2005; Wriggers, 2006). Режисираната подаваемост позволява ефективно управление на усилията и оптимизация на конструкцията. Числените резултати потвърждават приложимостта на метода в инженерната практика.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Божинов, Б., & Попов, С. (2016). *Изчисляване на пилоти, шлицови и шпунтови стени, натоварени с хоризонтални сили и огъващи моменти*. София.
[2] von Rabcewicz, L. (1964). The New Austrian Tunnelling Method. *Water Power*, Part One: November, 453-457; Part Two: December, 511-515.
[3] Pacher, F., Rabcewicz, L., & Müller, L. (1974). Zur Theorie und Praxis der Neuen Österreichischen Tunnelbauweise. *Rock Mechanics*, 6(2), 89-116.
[4] Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (2005). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics* (6th ed.). Elsevier Butterworth-Heinemann.
[5] Wriggers, P. (2006). *Computational Contact Mechanics* (2nd ed.). Springer.
[6] Bowles, J. E. (1996). *Foundation Analysis and Design* (5th ed.). McGraw-Hill.