

ПАРАМЕТРИ НА СТЕНД ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ДВИЖЕНИЕТО НА ТЯЛО С ЕДНА НЕПОДВИЖНА ТОЧКА

Теодор Тодоров¹

PARAMETERS OF A TEST BENCH FOR EXAMINATION OF A BODY WITH ONE FIXED POINT

Teodor Todorov¹

Abstract:

In the current article some preliminary calculations regarding the design and construction of a test bench for a spherically moving body are considered. Guidelines for determining the shape of the body itself are given. Dynamic and mathematical models are discussed, with the help of which the parameters of the test bench are specified.

Keywords:

Spherical Motion, Dynamic and Mathematical Model, Modelling

1. ВЪВЕДЕНИЕ

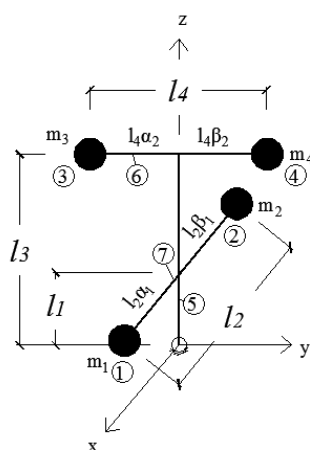
В настоящия доклад се разглежда определянето на параметри на стенд за изпитване на сферично движещо се тяло (тяло с една неподвижна точка). Целта е да се конструира подходяща експериментална постановка за верификация на резултати, получени чрез разработени динамични и математически модели. Обектът на изследването – трептения на тяло с една неподвижна точка, е избран на база сходства с действителното поведение на някои строителни конструкции, подложени на външни смущения. В практическо отношение като тела с една неподвижна точка могат да се разглеждат антени, мачти, кули, съоръжения на електропреносната система и др.

2. ДИНАМИЧЕН МОДЕЛ НА СФЕРИЧНО ДВИЖЕЩО СЕ ТЯЛО

Сферичното движение представлява движение на тяло с една неподвижна точка. От теорията е известно [1], че това е движение с три ротационни степени на свобода. Изборът на форма на изследваното тяло е съобразен с необходимостта да се подчертае пространствената същност на задачата.

¹ Теодор Тодоров, ас. инж., катедра „Техническа механика“, ХТФ, УАСГ, София, бул. „Христо Смирненски“ № 1, e-mail: tstodorov_fhe@uacg.bg,
Teodor Todorov, assist.prof. eng. Department of Technical Mechanics, FHE, UACEG, Sofia, 1 Hristo Smirnenski blvd, e-mail: tstodorov_fhe@uacg.bg.

На фиг. 1 е показана принципна схема на тялото.



Фигура 1. Принципна схема на тялото.

Три прътови елемента (тръби) се разполагат по направлението на оси x , y и z на Декартова координатна система, неподвижно свързана с тялото. Това е координатната система, която се използва в изчисленията, тъй като в нея се работи най-лесно. Сферичната опора (неподвижната точка) се приема в началото на координатната система. По направление на прътите по x и y има възможност за прикрепяне на концентрирани маси. Центровете на тежестта на прътите лежат по ос z . Т.е. ексцентричност може да се постигне с вариране на положението на концентрираните маси. С 1, 2, 3 и 4 на фиг. 1 са означени концентрирани маси, докато с 5, 6 и 7 – прътите елементи. С коефициентите α_i и β_i се определя положението на масите по дължина на съответния прът. Като се ползват известните от курсовете по механика геометрични зависимости [2], се определя инерционната матрица $[a]$.

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

При симетрична постановка на задачата, тази матрица е диагонална.

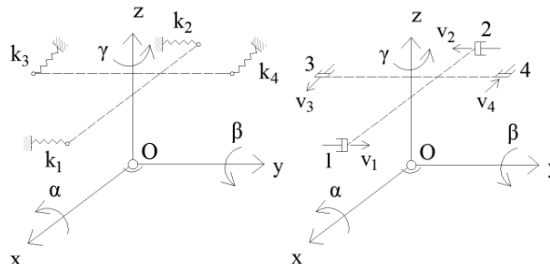
Като се отчетат удълженията на пружините във функция на обобщените координати (за обобщени координати се избират завъртанията по оси x , y и z) се стига до функция, описваща потенциалната енергия на системата. Отново най-удобен за работа е матричният запис, чрез който се представя еластичната матрица $[c]$:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Могат да се използват изведените още от Ойлер зависимости за скорост на точка от сферично движещо се тяло [2], а така също и функцията на Рейли, за да се получи дисипативната матрица $[b]$:

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

На фиг. 2 са дадени принципни изчислителни схеми, които се ползват за определянето на матрици [c] [b].



Фигура 2. Принципни изчислителни схеми за определяне на еластичната и дисипативната матрици.

Целта на настоящата статия е да коментира експерименталната страна на задачата. По тази причина тук няма да се дава подробното извеждане на коефициентите на матриците.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ НА СФЕРИЧНО ДВИЖЕЩОТО СЕ ТЯЛО

Матриците [a], [b] и [c] са необходими за матричния запис на уравненията на Лагранж от II-ри род – ДУ-ия, с чиято помощ се описва движението. Това не е единствения метод за решение на задачата, но е избран поради неговата универсалност [3]. Ако завъртанията около оси x, y и z се означат съответно с α , β и γ , то уравненията на Лагранж добиват вида:

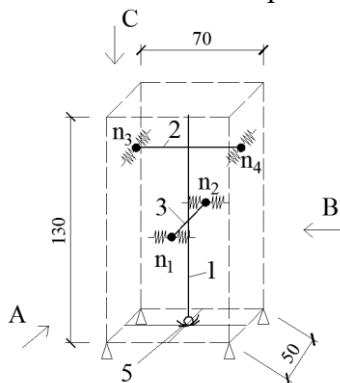
$$[a] \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{Bmatrix} + [b] \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} + [c] \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_\alpha \\ Q_\beta \\ Q_\gamma \end{Bmatrix} \quad (4)$$

, където дясната част на (4) е векторът на обобщените сили. Те ще са моменти на сили спрямо осите x, y и z за конкретния случай.

4. ХАРАКТЕРИСТИКИ НА СТЕНДА

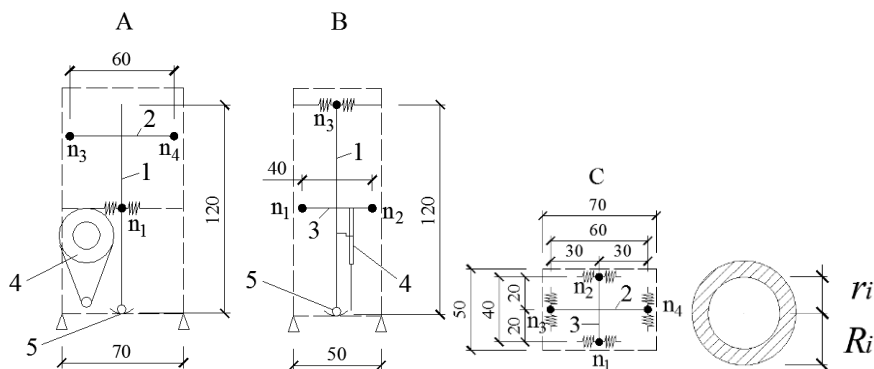
4.1. Геометрия на стенда

Избраната геометрия на стенда е показана на фиг. 3. Тя е съобразена със съществуващите модели при лабораторията за числено и експериментално динамично моделиране (ЛЧЕДМ) при катедра „Техническа механика“ към ХТФ на УАСГ. Симетричните форми са по-лесни за изпълнение и се прилагат най-често в практиката.



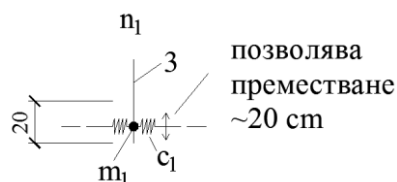
Фигура 3. Геометрия на стенд.

Означенията 1, 2 и 3 на фиг.3 са тръбни сечения, които моделират пръти по 3 взаимноперпендикулярни направления. Пръти 2 и 3 могат да се движат по направление на 1. Връзката се осъществява с помощта на скоби. С 5 на фиг. 3 е означена сферичната опора (неподвижната точка). На фиг. 4 са дадени погледите А, В и С. Размерите, котирувани на фиг. 4, ориентировъчно задават една горна граница на габаритите на стенда. Това изискване е продиктувано от необходимостта за известна мобилност на опитната постановка. Използваните тръбни сечения са показани на фиг. 4. $R_i \approx 30\text{ mm}$ и $r_i \approx 29\text{ mm}$ за прът 1 и $R_i \approx 20\text{ mm}$ и $r_i \approx 19\text{ mm}$ за пръти 2 и 3. Дължините на тръбите се подбират така, че да не се получи удар в рамката на стенда. Максималните дължини са показани на фиг.4.



Фигура 4. Погледи към стенд – размери

В $n_1 - n_4$ се разполагат концентрирани маси. Удобно е да се използват цилиндрични форми (познати от вдигането на тежести). Технически оправдано е в тези точки да се захванат и пружините, които моделират еластичните свойства на тялото. Пак там се разполагат и демпферите, с чиято помощ се моделират затихващите трептения. Окачването на пружините в една точка е успоредно, както е показано на фиг. 5. Концентрираната маса има възможност да се разположи на различно място по направление на тръбата.



Фигура 5. Окачване на пружини в точка.

4.2. Пружини

В етапа на динамичното и математическото моделиране на задачата тези две пружини се заместват с една еквивалентна, като се ползва зависимостта [4]:

$$c = c_1 + c_2 \quad (5)$$

, където c_1 и c_2 са коравините на пружините, окачени в съответната точка. За да бъде обозримо с просто око едно трептене е необходимо то да е с период около 0,5-1 s или честота 1 – 2 Hz (съответно кръгова честота $2\pi - 4\pi\text{ s}^{-1}$). За първо приближение се разглежда ДУ, описващо трептенето на материална точка:

$$\ddot{x} + 2 \cdot n \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{P_0}{m} \sin \theta t \quad (6)$$

, където $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ е собствена кръгова честота, $n = \frac{b}{2m}$ е коефициент на затихване. Дясната част на у-ие (6) моделира външно въздействие (силово, кинематично или инерционно). Като първо приближение за определяне на коравината на еквивалентната пружина се ползва $m\omega^2 = c$. Препоръчително е собствената кръгова честота да е по-близо до горната граница – например 10 s^{-1} . По този начин демпфираната честота, която обикновено е по-малка, да се получи близо до долната граница [5]. Т.е. при честота 10 s^{-1} за точка с маса $2,5 \text{ kg}$ необходимата коравина на пружината би била $250 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Аналогично за точка с маса 5 kg необходимата коравина на пружината би била $500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. В лабораторията се работи с пружини със сходни коравини.

Следва да се подчертае, че горното изчисление е само начално приемане на коравини. Разглежданият обект е модел на тяло, а не на материална точка - той трябва да позволява окачане на различни по големина маси на различни места по дължината на пръти 2 и 3, както и окачането на пружини с различна коравина във всяка точка. Тъй като целта на стенда е разглеждането на сферичното движение, то дори и при предпоставката за материална симетрия спрямо координатните равнини (с нея се работи най-лесно) коравините на използваните пружини ще се подберат така, че еластичната матрицата [c] да не се получи диагонална. При избора на пружини следва да се съобрази и фактът, че при решението на задачата за трептения на тяло с неподвижна точка е приета предпоставката за малки ъгли.

4.3. Демпфери

При изборът на демпферни устройства следва да се спазва изискването матрицата [b] да не се получи диагонална, за да има взаимовръзка между обобщените координати и да се запази постановката на задачата. Ако за начално приемане се възприеме трептенето на материална точка, то за коефициентите на линейно съпротивление се ползва зависимостта $b = 2 \cdot n \cdot m$. Коефициентът на затихване трябва да е по-малък от кръговата честота – обикновено в порядък $\frac{n}{\omega} = 0,1 - 0,3$. Тогава, при честота 10 s^{-1} и $\frac{n}{\omega} = 0,2$ за $b = 2m$. При маса $m = 2,5 \text{ kg}$, $b = 5 \text{ Ns/m}$, при маса $m = 5 \text{ kg}$, $b = 10 \text{ Ns/m}$. По отношение на хода на демпферите, те трябва да позволяват трептенето на тялото около началното положение. От практическа гледна точка е най-лесно демпферите да се разположат в точките на окачане на масите и пружините.

4.4. Външни въздействия

Както вече беше споменато, външните въздействия се разглеждат като силови, кинематични и инерционни. Силите моделират въздействия от външни сили (например вятър), кинематичните са свързани с движение на опората (симулират земетръс) докато инерционните въздействия са свързани с въртенето на неуравновесени маси в тялото.

Внимателно трябва да се определят амплитудата и честотата на принудените трептения върху системата. От голямо значение е честотата, която трябва да е с поне 20 % по-висока или по-ниска от собствената, за да избегне опасното явление резонанс. При стандартни показатели на задвижващите електромотори от около 2000 об./min и редуктор с предавателно число около 20 се достига до 100 об./min на въртящия се диск, което е около 1,5 Hz или $9,42 \text{ s}^{-1}$. В процеса на работа по стенда се правят замервания и се избира най-подходящата машина.

5. ОТЧЕТ И ОБРАБОТКА НА РЕЗУЛТАТИТЕ

За подбор на акселерометри и виброметри се съобразяват параметрите на очакваните трептения. При предпоставката за малки ъгли се очаква амплитудите на свободните трептения да са в рамките на началното отклонение (приема се не повече от 0,05 m), докато амплитудите на принудените трептения - около 0,03 m. При съвпадение на фазите на двете съставни трептения амплитудите се събират. Следователно, с известно подсигуриране, виброметърът, с който ще се оборудва стендът, трябва да може да измерва премествания до 0,15 m. Диапазонът на ускоренията може да се изчисли като се отчете, че при детерминирани трептения, описани с хармоничен закон, ускорението се дава с преместването по квадрата на честотата на трептене (като приближение при разглеждането на тяло).

$$|a_{max}| = |x_{\omega,max}|\omega^2 + |x_{\theta,max}|\theta^2 \quad (7)$$

което, при гореописаните стойности, дава резултат около 6 m/s^2 . Отново с известна доза сигурност може да се ползва акселерометър с диапазон на измерваните ускорения $(-10 \div 10) \text{ m/s}^2$, или от $-g$ до $+g$. Възможно е да се търси и по-общ уред, който мери премествания, скорости, ускорения в зададените диапазони [6]. Необходимо е да се съблюдават същите граници при избора на подходящ цифров предавател за трансформиране на сигнала. Последният елемент в експерименталната установка е компютърна конфигурация за обработка и анализ на резултатите.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представеният проект на стенд за изпитване на сферично движещо се тяло може да претърпи известни отклонения от представените тук параметри по технологични или други причини. Изборът на елементите на стенда е свързан и с финансовото обезпечаване на настоящото изследване.

В процеса на работа по стенда може много бързо да се правят промени в началните данни при използването на съвременен изчислителен софтуер – ЛЧЕДМ разполага с лиценз за програмната система MATLAB, която се ползва при разработването на динамичните и математичните модели.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бъчваров, С., А. Джонджоров, Б. Чешанков, Н. Малинов, Ръководство за упражнения и решаване на задачи по теоретична механика, ДИ „Техника“, 1973, 589 с.
- [2] Савов, Ц., Д. Патъов, Теоретична механика част II кинематика и динамика (глави 1-11), ВНВТУ „Тодор Каблешков“, 1988.
- [3] Кюркчиев, Р., В. Александров, Теоретична механика записки, УАСГ, 2001, 393 с.
- [4] Писарев, А., Механични трептения, Техника, 1985, 288 с.
- [5] Павлов, П. С. Лилкова-Маркова, Б. Наков, Ю. Кехайова, Прецизиране параметрите на стенд за изследване принудените трептения на материална точка, Journal of the Technical University of Gabrovo, Vol 37'2009.
- [6] Павлов, П., От реалната конструкция до експерименталния модел, изд. „Авангард-прима“, 2017, 146 с.