

ИЗСЛЕДВАНЕ КОЕФИЦИЕНТИТЕ НА ИЗМЕНЕНИЕ НА РАЗМЕРИТЕ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ОБЕКТИ В ПЕРСПЕКТИВНИТЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Наташа Бакларова¹

RESEARCH OF COEFFICIENTS OF DIMENSIONAL CHANGE OF GEOMETRIC OBJECTS IN PERSPECTIVE IMAGES

Natasha Baklarova

Abstract:

The perspective image is very close to the natural impression of the object by the observer. These qualities of perspective images have necessitated their application in architecture, engineering and more. An unresolved problem is the change (shortening) of the dimensions in the three mutually perpendicular planes. The purpose of the study is to determine the coefficients of change of the dimensions of the objects in the perspective images. This will allow by perspective images of buildings and other objects to be judged on their appearance, proportions and ratios of the volumes. In order to establish the relationship of the shortening coefficients on the three axes, theorem for similar triangles, homothety, etc. are used. Difficulty causes the change of angles in the images of elements with parallel planes (walls). Graphoanalytical methods have been used to determine the dependencies between the sizes of objects in different planes. Studies have been made for a two-point perspective, but conclusions can be drawn about the applicability of the approach in one- and three-point perspectives.

Keywords:

Perspective, Escape points, Measuring points, Distance, Horizon

Определянето на действителните размери на геометрични обекти по зададени техни перспективни изображения е от съществено значение за областите архитектура, строителство на сгради и съоръжения, археология, космонавтика и редица други. Използваните до момента методи не са достатъчно точни. Това в най-голяма степен проличава в случаите на проекции на геометрични обекти, разположени под голям наклон спрямо хоризонталната и вертикална ос. Мотивите за преодоляване на тези недостатъци доведоха до необходимостта да потърсим други методи за изследване на коефициентите

¹ Наташа Бакларова, доц. д-р , кат. „Строителство на сгради и съоръжения“, ВСУ, КК”Дружба”, Варна, e-mail: nat_baklarova @abv.bg

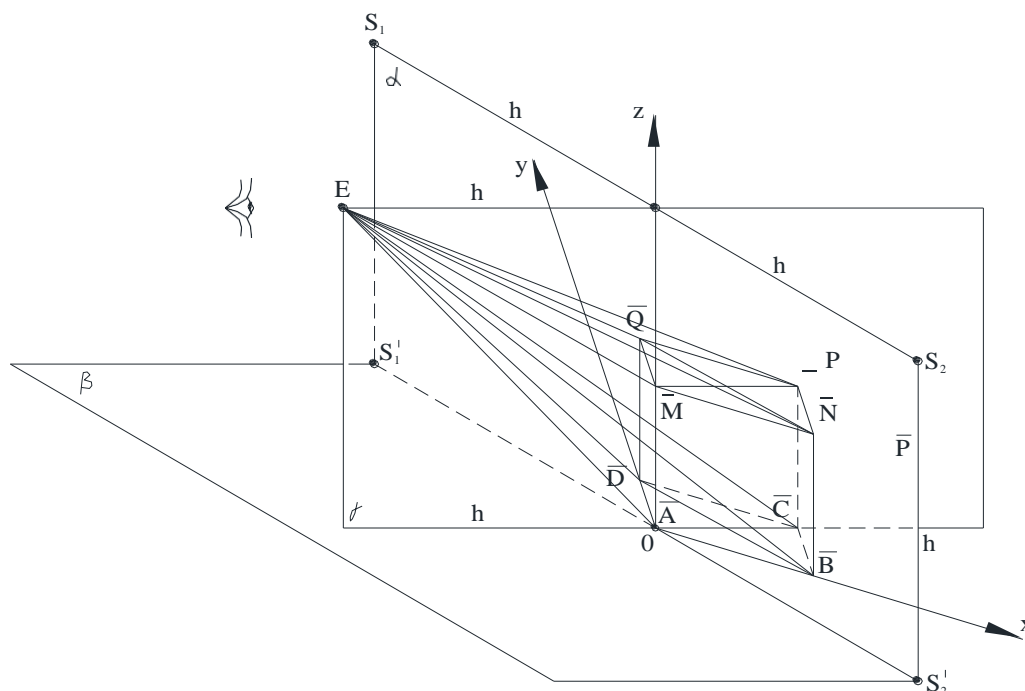
¹ Natasha Baklarowa, assoc.prof., Dept. “Construction of buildings“, VFU, КК.”Дружба”, Варна, e-mail: nat_baklarova@abv.bg

на изменение на размерите на геометрични обекти в перспективните изображения. Настоящата разработка е част от едно по-задълбочено проучване и изследване, свързано с намиране на математически методи и методика при моделиране на перспективни изображения и намиране действителните размери на геометрични обекти.

Целта на изследването е да се определят коефициентите на изменение на размерите на обектите в перспективните изображения. Това ще позволи по перспективните изображения на сгради и други обекти да се съди за външния им вид, пропорциите и съотношенията на обемите. За да се открият взаимовръзките на коефициентите на скъсяване по трите оси в процеса на работа се установи, че използването на теореми за подобни триъгълници, хомотетия и други не водят до търсените резултати. Затрудненията произтичат от промяната на ъглите в изображенията на елементи с успоредни равнини(стени). Това наложи необходимостта от използване методите на аналитичната геометрия. Използвани са и графоаналитични методи, които позволяват да се установят зависимости между размерите на обектите в различните равнини. Изследванията са направени за перспектива с две убежни точки, но могат да бъдат направени изводи, за приложимостта на подхода в случаите на перспектива с една и три убежни точки.

За откриване коефициентите на изменение на размерите на геометрични обекти в перспективните изображения е използван куб $\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} \overline{M} \overline{N} \overline{P} \overline{Q}$ за който е известна дължината на неговия ръб a , h - височината на хоризонта, d - дистанцията (разстоянието от наблюдателя до перспективната равнина). За удобство е прието $h=d$. Разстоянието от върха на куба \overline{A} до перспективната равнина е $\overline{A} \overline{G} = p$. Точка G е пробода на перпендикуляра с перспективната равнина и $\overline{HG} = m$.

Намерено е перспективното изображение $\overline{ABCDMNPQ}$ на куба. Въведена е координатна система, ориентирана по посочения начин. (Фиг.1)



Фигура 1. Разположение на куба спрямо така ориентираната координатна система и намиране на перспективното изображение

При така въведената координатна система $Oxyz$ са приети следните означения: Координатна система $Oxyz$ ориентирана така, че оста Oz да съвпада с пресечницата на равнините α и γ , а осите Ox и Oz да лежат в равнината β . Равнините α , β и γ са перпендикулярни една спрямо друга.

Методиката на изследване включва няколко конкретни случая. Когато кубът е наклонен спрямо перспективната равнина под ъгъл 30 градуса, 45 градуса, 60 градуса и под произволен ъгъл α . В настоящата разработка е представен само един от случаите, когато кубът е наклонен под ъгъл 45 градуса към перспективната равнина. (Поради ограничение в обема на публикацията.)

Моделирани са параметрите на перспективното изображение на куба в параметрични данни при $n=0$ и $m=0$. За целта са определени координатите на върховете на куба, точката на наблюдателя, двете убежни точки и геометрично представяне на перспективното изображение на куба. При $n=0$ и $m=0$ координатите на върховете на куба са: $A(0, 0, 0)$; $B(a, 0, 0)$; $C(a, a, 0)$; $D(0, a, 0)$; $M(0, 0, a)$; $N(a, 0, a)$; $P(a, a, a)$; $Q(0, a, a)$.

Определени са и координатите на двете убежни точки $S_1(-\frac{h}{\sqrt{2}}; \frac{h}{\sqrt{2}}; h)$ и $S_2(\frac{h}{\sqrt{2}}; -\frac{h}{\sqrt{2}}; h)$. Точка E е точката на наблюдателя и нейните координати са $E(-\frac{h}{\sqrt{2}}; -\frac{h}{\sqrt{2}}; h)$.

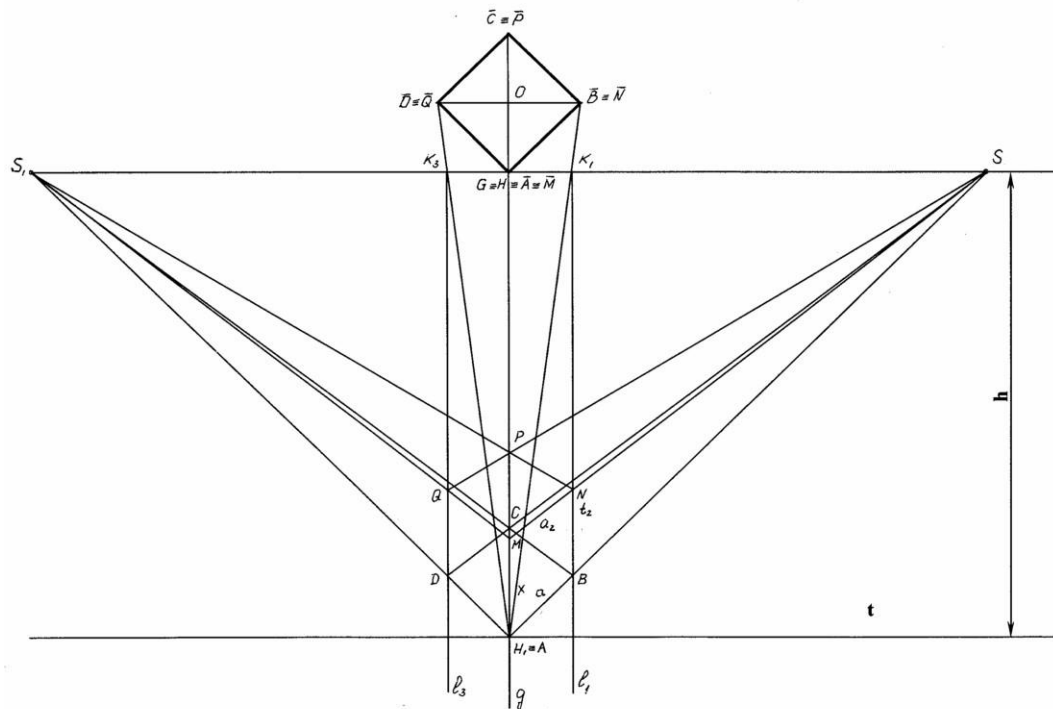
Геометричният модел представящ перспективното изображение на куба се получава чрез пресичане на перспективните лъчи, свързващи всеки връх на куба и точката на наблюдателя с равнината α .

$$\begin{aligned} \overline{EB} \cap \alpha &= \{B\}; \quad \overline{EC} \cap \alpha = \{C\}; \quad \overline{ED} \cap \alpha = \{D\}; \quad \overline{EM} \cap \alpha = \{M\}; \quad \overline{EP} \cap \alpha = \{P\}; \\ \overline{EQ} \cap \alpha &= \{Q\}; \end{aligned}$$

Перспективно изображение на куба $\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} \overline{M} \overline{N} \overline{P} \overline{Q}$ е $ABCDMNPQ$ и лежи в равнината α .

Уравнението на равнината α е определено чрез нормалния за равнината вектор \overrightarrow{AC} $(a, a, 0)$ и точка $\overline{M}(0, 0, a)$, която е точка от равнината.

Точката \overline{A} съвпада с координатното начало и нейните координати са $A(0, 0, 0)$. Тя лежи в равнината в която се намира перспективното изображение и съвпада с перспективното си изображение точка $A(0, 0, 0)$. Перспективното изображение на куба при склопени равнини е представено на (Фиг.2).



Фигура 2. Перспективното изображение на куба при склопени равнини

Използваме изведените математически модели за намиране координатите на върховете на перспективното изображение на куба, които са били обект на изследване в друга наша разработка, където върховете на перспективното изображение са:

$$A(0, 0, 0), B \left(\frac{ah}{2h + a\sqrt{2}}; \frac{-ah}{2h + a\sqrt{2}}; \frac{ah\sqrt{2}}{2h + a\sqrt{2}} \right), C \left(0; 0; \frac{ah\sqrt{2}}{h + a\sqrt{2}} \right),$$

$$D \left(\frac{-ah}{2h + a\sqrt{2}}; \frac{ah}{2h + a\sqrt{2}}; \frac{ah\sqrt{2}}{2h + a\sqrt{2}} \right), M(0, 0, a), N \left(\frac{ah}{2h + a\sqrt{2}}; \frac{-ah}{2h + a\sqrt{2}}; \frac{ah(2 + \sqrt{2})}{2h + a\sqrt{2}} \right),$$

$$P \left(0; 0; \frac{ah(1 + \sqrt{2})}{h + a\sqrt{2}} \right), Q \left(\frac{-ah}{2h + a\sqrt{2}}; \frac{ah}{2h + a\sqrt{2}}; \frac{ah(2 + \sqrt{2})}{2h + a\sqrt{2}} \right).$$

Координатите на точка B_1 , която е перспективното изображение на точка B_1 се намират, като пресечна точка на равнината $\alpha: x + y = 0$ с правата $(\overline{B_1E})$. От решението на системата

$$\begin{cases} \alpha: x + y = 0 \\ (B_1E): \frac{(x - 2a)\sqrt{2}}{-h - 2\sqrt{2}a} = \frac{y\sqrt{2}}{-h} = \frac{z}{h} \end{cases}$$

Следва, че точка B_1 е със следните координати $B_1 \left(\frac{ah}{h+a\sqrt{2}}, \frac{-ah}{h+a\sqrt{2}}, \frac{ah\sqrt{2}}{h+a\sqrt{2}} \right)$

Аналогично се намират координатите и на точка B_2 , като пресечна точка на перспективната равнина $\alpha: x+y=0$ с правата $(\overline{B_2E})$. От решението на системата

$$\{B_2\}: \begin{cases} \alpha: x+y=0 \\ (B_2E): \frac{(x-3a)\sqrt{2}}{-h-3\sqrt{2}a} = \frac{y\sqrt{2}}{-h} = \frac{z}{h} \end{cases}$$

Следва, че точка B_2 е със следните координати $B_2 \left(\frac{3ah}{2h+3a\sqrt{2}}, \frac{-3ah}{2h+3a\sqrt{2}}, \frac{3ah\sqrt{2}}{2h+3a\sqrt{2}} \right)$.

Координатите на точка N_1 се намират от решението на системата образувана от уравнението на проекционната равнина $\alpha: x+y=0$ и уравнението на правата $(\overline{N_1E})$

$$\{N_1\}: \begin{cases} \alpha: x+y=0 \\ (N_1E): \frac{(x-2a)\sqrt{2}}{-h-2\sqrt{2}} = \frac{y\sqrt{2}}{-h} = \frac{z-a}{h-a} \end{cases}$$

Така точка N_1 е с координати $N_1 \left(\frac{ah}{h+\sqrt{2}}, \frac{-ah}{h+\sqrt{2}}, \frac{a(h(1+\sqrt{2})-a\sqrt{2}+\sqrt{2})}{h+\sqrt{2}} \right)$.

Координатите на точка P_1 се намират от решението на системата образувана от уравнението на проекционната равнина $\alpha: x+y=0$ и уравнението на правата $(\overline{P_1E})$

Така точка P_1 е с координати $P_1 \left(\frac{ah}{2h+2a\sqrt{2}}, \frac{-ah}{2h+3a\sqrt{2}}, \frac{ah(h(2+\sqrt{2})-2a\sqrt{2})}{(h+a\sqrt{2})(2h+3a\sqrt{2})} \right)$.

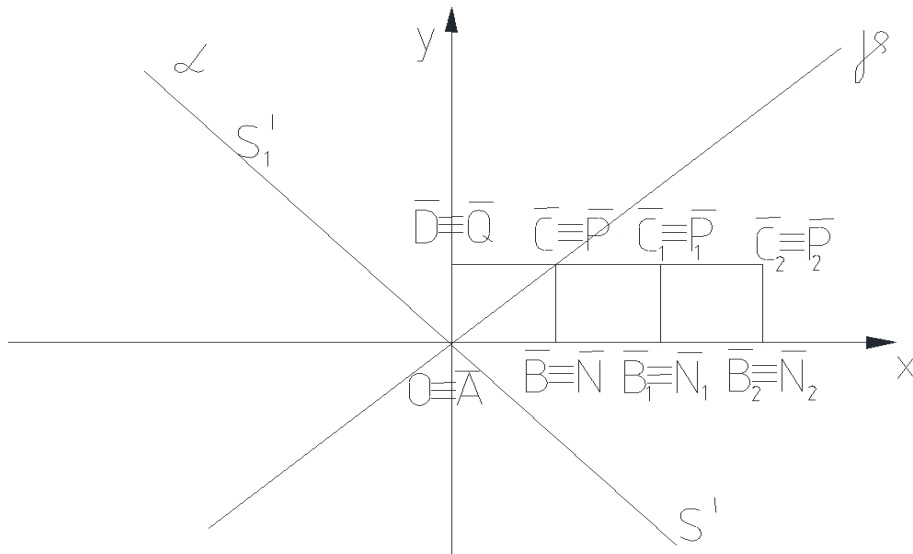
Знаейки координатите на така намерените точки лесно се намират координатите на векторите

$$\overline{MQ} \left(\frac{-ah}{2h+a\sqrt{2}}, \frac{ah}{2h+a\sqrt{2}}, \frac{a\sqrt{2}(h-a)}{2h+a\sqrt{2}} \right)$$

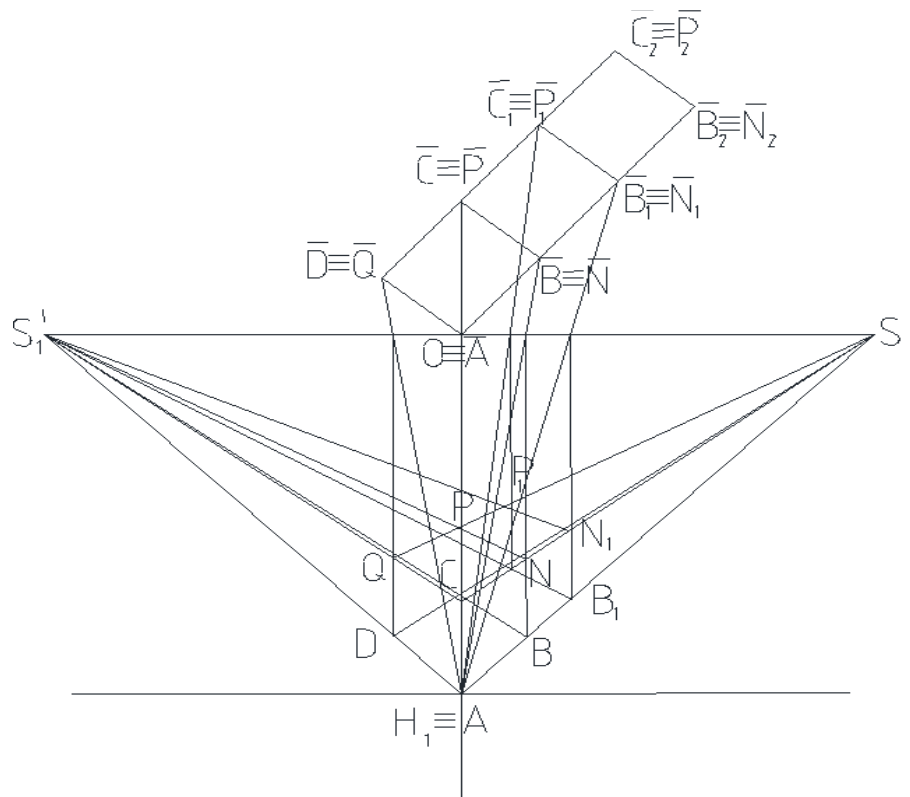
$$\overline{PN} \left(\frac{ah}{2h+a\sqrt{2}}, \frac{-ah}{2h+a\sqrt{2}}, \frac{ah\sqrt{2}(a-h)}{(2h+a\sqrt{2})(h+a\sqrt{2})} \right) \text{ и}$$

$$N_1 P_1 \left(\frac{ah(\sqrt{2}-h-3a\sqrt{2})}{a^2 [ah^2(10+\sqrt{2}) - a^2 h(6\sqrt{2}-4) - \sqrt{2}h^3 + 2h^2 - 14ah + 6\sqrt{2}a^3 - 6\sqrt{2}a^2]}, \frac{-ah(\sqrt{2}-h-3a\sqrt{2})}{2h+a\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{(h+\sqrt{2})(h+a\sqrt{2})(2h+3a\sqrt{2})}$$

Използвайки формулата за дължина на вектор се намират и дължините на отсечките на перспективното изображение. Тъй като всички тези вектори и описаните прави лежат в перспективната равнина лесно се намират и ъгловите коефициенти на всяка една от правите. Много често в практиката се използват модули с еднакви размери. Това позволява да се използва обоснованият и приложен по-горе подход за определяне на дължините на отсечките на различните модули в перспективните им изображения. Това със същата сила се отнася и за определянето на ъгловите коефициенти на всяка една от правите от перспективния чертеж. Подобна постановка за онагледяване на тази теза е показана на Фиг.3 и Фиг.4.



Фигура 3. Разположение на модулите в координатната система



Фигура 4. Постановка за определяне дължините на отсечките на модули в перспективно изображение

От изведените математически модели за намиране уравненията на правите минаващи по ръбовете на геометрични обекти могат да бъдат направени следните изводи:

Познавайки тези зависимости могат веднага да бъдат получени координатите на точките – върхове на перспективното изображение, ако знаем действителната дължина на ръба на куба и дистанцията (разстоянието от наблюдателя до перспективната равнина).

Извеждането на математическите модели определящи уравненията на проекционните лъчи и правите минаващи по ръбовете на обекта дават възможност да бъдат определени коефициентите на изменение на размерите на изследвания геометричен обект.

Обоснована е възможността за приложимостта на подхода използван при извеждането на математическите модели за определяне на коефициентите на изменение на

размерите на модулни геометрични обекти и ъгловите коефициенти на всяка една от правите от перспективния чертеж.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бакларова Н., Моделиране на параметрите на перспективни изображения на геометрични обекти, ВСУ“Черноризец Храбър“ Университетско издателство, 2015г., 165с. (монография).
- [2] Бакларова Н., Математически методи и методика при моделиране на перспективни изображения на строителни конструкции, ВСУ“Черноризец Храбър“, Университетско издателство, 2012г., 157с.(дисертационен труд)
- [3] Даков В., Ангелова И. Ръководство по дескриптивна геометрия, София., 2004г. (книга)
- [4] Данаилова Н. К., Зарева Ц. И. Ръководство за упражнения и курсови задачи по дескриптивна геометрия, УАСГ, София, 2009г.(учебно пособие второ преработено издание)
- [5] Milev Ya., Descriptive Geometry, CD, ”Print Grafik”, Varna, 2019г., p174-179.(monografy)
- [6] Milev Ya. Tasarim Geometrisin, monografy, CD, p60-62, “Baski Grafik” Ltd, Varna, 2019 г., p. 60-62 (monografy)
- [7] Милев Я. Дескриптивна геометрия, Печат“График“ООД, Варна, 2019 г., 110стр.(монография)
- [8] Милев Я., Н.Бакларова, Ръководство по дескриптивна геометрия, COLOR-PRINT, 2013г. с.93 (книга)
- [9] Сандалски Бр. и кол. Основи на конструирането и САД. Издателство „Софттрейд“, София, 2007.(книга)